ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ

13/5/2019

Παράδειγμα: Να βρεθούν σημεία καμπύλης της κυβικής α.κ. Fermat:

$$V(x^3+y^3-z^3) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$$

- Αρχικά να βρω απλά σημεία της V, που μηδενίζουν την Εσσιανή.

- Θα βρω ιδιόμορφα σημεία & θα τα εξαιρέσω και θα λύσω το συσ/μα: $\begin{cases} H_F=0 \\ F(x,y,z)=0 \end{cases}$

- Ιδιόμορφα: $\begin{cases} \partial F/\partial x=0 \\ \partial F/\partial y=0 \\ \partial F/\partial z=0 \end{cases} \rightsquigarrow (x,y,z)=(0,0,0)$: ιδιόμορφο $\notin \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

$\Longrightarrow \nexists$ ιδιόμορφα σημεία

- Εσσιανή ορίζουσα: $H_F = \begin{vmatrix} 6x & & 0 \\ & 6y & \\ 0 & & 6z \end{vmatrix} = 216xyz$

Σημεία: $\begin{cases} x^3+y^3-z^3=0 \\ xyz=0 \end{cases}$

• Αν $x=0$: $y^3=z^3 \Rightarrow \boxed{y=z} \rightsquigarrow [0,1,1]\in P^2_{\mathbb{C}}$ (1)

• Αν $y=0$: $x^3=z^3 \Rightarrow \boxed{x=z} \rightsquigarrow [1,0,1]\in P^2_{\mathbb{C}}$ (2)

• Αν $z=0$: $x^3=-y^3 \Rightarrow \boxed{x=-y} \rightsquigarrow [-1,1,0]\in P^2_{\mathbb{C}}$ (3)

• Από (1) : $y^2+yz+z^2=0 \Rightarrow y=\left(-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z$

$$\Rightarrow \left[0,-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}i}{2},1\right]$$

• Από (2) : $\left[-\frac{1}{2}\pm\frac{i\sqrt{3}}{2},0,1\right]$

• Από (3) : $\left(\frac{1}{2}\pm\frac{i\sqrt{3}}{2},1,0\right)$

Σύνολο, 9 σημεία καμπής!

⚠ Κάθε λεία κυβική καμπύλη, έχει 9 σημεία καμπής

⚠ Κάθε λεία προβολική καμπύλη βαθμού ≥ 2, έχει πάντα σημείο καμπής.

⚠ Κάθε ανάγωγη ιδιόμορφη (όχι λεία) κυβική καμπύλη, έχει 3 σημεία καμπής.

Θεώρημα Αν $f = f_1 \cdots f_s \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \Rightarrow$

$V(f) = V(f_1) \cup V(f_2) \cup \dots \cup V(f_s)$, όπου:

$$V(f_i) = \{(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n : f_i(a_1, \dots, a_n) = 0\}.$$

SOS

Θεώρημα (Ασθενές Θεώρημα Bezout)

- Αν δύο καμπύλες βαθμών m και n, έχουν περισσότερα από $m \cdot n$ κοινά σημεία

$\Longrightarrow$ έχουν κοινή συνιστώσα

Παράδειγμα • Έστω L_1, L_2 ευθείες με βαθμό $m=1$ και $n=1$, αντίστοιχα, τότε, από το Θ. Bezout,

, έχουν τουλάχιστον $2 > 1 \cdot 1$ κοινά σημεία, ούτως ώστε να ταυτίζονται $\Longrightarrow$ έχουν κοινή συνιστώσα.

- Αλλά, οι L_1, L_2 είναι ανάγωγες. Συνεπώς, υπάρχει μοναδική κοινή συνιστώσα $L_1 = L_2$.

Παράδειγμα Έστω L: κωνική, που διέρχεται από τις 3 κορυφές ισοσκελούς τριγώνου, καθώς και από τα μέσα των 2 ίσων πλευρών του.

Νδο. η $V(L)$ διέρχεται και από τα σημεία που τέμνουν τα ύψη των ίσων πλευρών του τριγώνου.

Λύση

Θέμα Ιανουίου Θεωρούμε κυβική $\gamma \subset \mathbb{P}^2$: διέρχεται από τις 8 κορυφές ενός κανονικού 12-γώνου. ΝΔΟ η γ διέρχεται υποχρεωτικά και από τις άλλες 4 κορυφές.

• Το 12γωνο κανονικό $\Longrightarrow$ εγγράψιμο σε κύκλο C. Άρα η γ και ο C έχουν $8 > 3 \cdot 2$ κοινά σημεία.

Θ. Bezout $\to$ κοινή συνιστώσα & C: ανάγωγη $\Longrightarrow$ Η γ έχει κοινή συνιστώσα τον C $\Rightarrow$

$V(\gamma) = V(C) \cup V(\cdot) \cup \ldots$. Άρα, τα σημεία του $C \in \gamma$, άρα και τα υπόλοιπα 4 του 12-γώνου.

Ορισμός • Αντιστοιχούμε σε κάθε σημείο P τομής δύο καμπυλών F και G, τον αριθμό: $I_P(F,G)$, που αντιστοιχεί στην πολ/τα τομής των F και G στο P.

Θεώρημα (Ισχυρό Θεώρημα Bezout)

SOS

• Έστω $V(f)$ και $V(G)$ καμπύλες του $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, βαθμών m και n αντίστοιχα, έτσι, ώστε να μην έχουν κοινή συνιστώσα. Τότε:

$$\boxed{\sum_P \left(I_P(F,G) \right) = m \cdot n}$$

(⚠ Μας περιγράφουν τον τρόπο που μπορεί να τέμνονται 2 επίπεδες καμπύλες)